PHYSICS

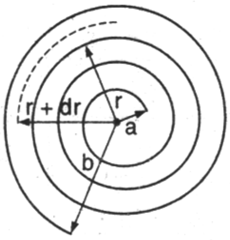
4. ऐम्पियर के नियमानुसार,

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$$

केवल बाहरी बिन्दु के लिये, रेखीय समाकलन के पथ द्वारा धारा घिरी होगी। अतः अन्दर की ओर, $B = 0$ ।

6. क्षैतिज धारावाही तारों के कारण लूप पर कोई बल नहीं होगा, क्योंकि इन तारों पर कार्य करने वाला बल समान और विपरीत होगा। आगे, $F_{AD} > F_{BC}$ / F_{AB} की दिशा बायीं ओर है और F_{BC} की दिशा दायीं ओर (दायें हाथ के नियम से)। अतः लूप पर कार्य करने वाला नेट बल तार की ओर होगा।

9. केन्द्र से r दूरी पर स्थित dr मोटाई का एक अवयव विचारणीय है। इस अवयव में फेरों की संख्या,



$$dN = \left(\frac{N}{b-a}\right)dr$$

इस अवयव के कारण कुण्डली के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र होगा,

$$dB = \frac{\mu_0 (dN) I}{2r}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{N}{(b-a)} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$\therefore \quad B = \int_{r=a}^{r=b} dB = \frac{\mu_0 NI}{2(b-a)} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

16. $$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\therefore \quad r = \frac{mv}{qB} = \sqrt{\frac{2mE}{q^2 B^2}}$$

जहाँ E = कण की गतिज ऊर्जा।

$$r_p = \sqrt{\frac{2mE}{e^2 B^2}}, \; r_d = \sqrt{\frac{2 \times 2m \times E}{e^2 B^2}}$$

और $$r_\alpha = \sqrt{\frac{2 \times 4m \times E}{(2e)^2 B^2}}$$

$$\therefore \quad r_p : r_d : r_\alpha = 1 : \sqrt{2} : 1$$

18. $$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{2\pi I}{a} \times \frac{1}{2}$$ (अर्द्धवृत्ताकार भाग के कारण)

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{2I}{a}$$ (धारा के समान्तर भागों के कारण)

ये दोनों क्षेत्र एक-दूसरे के लम्बवत् हैं। अतः परिणामी क्षेत्र

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

20. हम जानते हैं कि जब एक आवेशित कण चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् गति करता है, तब कण एकसमान चाल से वृत्ताकार पथ पर गति करता है। इसके परिणामस्वरूप कण पर एक अपकेन्द्री बल आरोपित होता है। अतः कण का वेग अपरिवर्तित रहता है।

21	5	22	2	23	1	24	4	25	2

CHEMISTRY

26. **(b)** $Ca(OH)_2$ अस्थायी कठोर जल के मृदुकरण के लिए प्रयोग किया जाता है।

27. **(b)** 'A' का सूत्र M_3N सुझाव करता है कि M एकसंयोजक धातु है।

$$\underset{(M)}{6Li} + N_2 \longrightarrow \underset{\substack{(A)\\ \text{लीथियम नाइट्राइड}}}{2Li_3N} \xrightarrow{\Delta} 6Li + N_2$$

$$Li_3N + 3H_2O \longrightarrow 3LiOH + \underset{(B)}{NH_3}$$

$$CuSO_4 + 4NH_3 \longrightarrow \underset{\text{नीला विलयन}}{[Cu(NH_3)_4]SO_4}$$

अतः M तथा B क्रमशः Li व NH_3 हैं।

28. **(d)** क्षारीय धातुएँ हैलोजन से क्रिया करके हैलाइड बनाती है वे सामान्यतः M^+X^- द्वारा प्रदर्शित की जाती हैं।

29. **(b)** **यौगिक** A : CaO; B : $Ca(OH)_2$; C : $CaCO_3$;
D : $Ca(HCO_3)_2$
$Ca(HCO_3)_2$ जल में विलेय है अतः यौगिक के विलयन में कार्बन डाइऑक्साइड अधिकता में प्रवाहित करने पर विलयन का दूधियापन नष्ट हो जाता है।

30. **(b)** $8LiH + Al_2Cl_6 \longrightarrow 2LiAlH_4 + 6LiCl$
$LiAlH_4 + 2BeCl_2 \longrightarrow 2BeH_2 + LiCl + AlCl_3$

31. **(a)** Li अपनी उच्च जालक ऊर्जा के कारण लगभग जल में अविलेय होता है किन्तु LiCl, Li आयन की उच्च जलयोजन ऊर्जा के कारण जल में विलेय होता है। LiCl अपनी सहसंयोजक प्रकृति के कारण ऐसीटोन में भी विलेय होता है। (क्योंकि सहसंयोजक लक्षण ऋणायन का आकार बढ़ने पर बढ़ता है।)

$$LiF < LiCl < LiBr < Li$$

32. **(b)** (i) BeO की जालक ऊर्जा इसकी जलयोजन ऊर्जा से अधिक होती है। अतः यह जल मे अविलेय है जबकि $BeSO_4$ की जलयोजन ऊर्जा इसकी जालक ऊर्जा से अधिक है अतः यह जल में शीघ्र विलेय है।
(ii) BaO की जालक ऊर्जा इसकी जलयोजन ऊर्जा से बहुत कम है अतः यह जल में विलेय है। $BaSO_4$ में जालक ऊर्जा जलयोजन ऊर्जा पर हावी है अतः यह जल में अविलेय है।
(iii) LiI अधिकतम् सहसंयोजक है क्योंकि Li^+ सबसे छोटा होता है तथा एनायन $(I)^-$ को अधिकतम् मात्रा में ध्रुवित करता है। अतः यह एथेनॉल में KI की अपेक्षा अधिक विलेय है।

33. **(c)** (i) परॉक्साइड जल से क्रिया करके H_2O_2 देते हैं।

$$O_2^{2-} + 2H_2O \longrightarrow 2OH^- + H_2O_2$$

(ii) सुपरऑक्साइड जल से क्रिया करके H_2O_2 व O_2 देते हैं।

$$2O_2^- + 2H_2O \longrightarrow 2OH^- + H_2O_2 + O_2$$

34. **(c)** (i) $2Mg(s) + O_2(g) \xrightarrow{\Delta} 2MgO(s)$

$$3Mg(s) + N_2(g) \longrightarrow Mg_3N_2(s)$$

(ii) $CaO(s) + \underset{\text{सिलिका}}{SiO_2(s)} \longrightarrow \underset{\text{कैल्सियम सिलिकेट}}{CaSiO_3(s)}$

(iii) बिना बुझा चूना क्लोरीन से अभिकृत होकर कैल्सियम हाइपोक्लोराइट $Ca(OCl)_2$ देता है।

$$\underset{\text{बुझा चूना}}{2Ca(OH)_2} + 2Cl_2 \longrightarrow \underbrace{CaCl_2 + Ca(OCl)_2}_{\text{ब्लीचिंग पाउडर}} + 2H_2O$$

(iv) $2Ca(NO_3)_2(s) \xrightarrow{\Delta} 2CaO(s) + 4NO_2(g) + O_2(g)$

35. **(d)** **सोडियम धातु** यह गलित NaCl (40%) व $CaCl_2$ 60% मिश्रण का 873 K पर डाउन सेल में विद्युत अपघटन करके बनाया जाता है। कैथोड पर मुक्त हुआ सोडियम मिट्टी के तेल में संग्रहित कर लिया जाता है जबकि Cl_2 ऐनोड पर मुक्त होती है।

$$NaCl(l) \xrightarrow{\text{विद्युत अपघटन}} Na^+ + Cl^-$$

कैथोड पर $Na^+ + e^- \longrightarrow Na(l)$

ऐनोड पर $2Cl^- \longrightarrow Cl_2(g) + 2e^-$

प्राप्त Na धातु ऑक्सीकरण पर Na_2O_2 देती है।

सोडियम हाइड्रॉक्साइड यह NaCl के जलीय विलयन (ब्राइन) का वैद्युत अपघटन करके कास्टर कैलनर सेल में मर्करी कैथोड व कार्बन ऐनोड के रूप में प्रयोग करके बनाया जाता है। कैथोड पर निर्मुक्त सोडियम धातु मर्करी से संयुक्त होकर सोडियम अमलगम बनाती है। Cl_2 गैस ऐनोड पर मुक्त होती है।

कैथोड पर $Na^+ + e^- \xrightarrow{Hg} Na$ अमलगम

ऐनोड पर $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

36. (*d*) प्लास्टर ऑफ पेरिस जलयोजन प्रक्रम द्वारा अत्यन्त कठोर हो जाता है यह जल के साथ मिलाने पर एक कठोर ढेर जिप्सम में बदल जाता है। इस प्रक्रम में आयतन में थोड़ी-सी वृद्धि होती है।

$$\underset{\text{प्लास्टर ऑफ पेरिस}}{CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O} + 1\frac{1}{2}H_2O \longrightarrow \underset{\text{जिप्सम}}{CaSO_4\cdot 2H_2O} + \text{ऊष्मा}$$

37. (*d*) प्लास्टर ऑफ पेरिस का जमना एक ऊष्माक्षेपी प्रक्रम है।

$$CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O \xrightarrow{H_2O} \underset{\text{ऑर्थोरोम्बिक}}{CaSO_4\cdot 2H_2O} \xrightarrow{\text{गर्म करने पर}} \underset{\substack{\text{मोनोऑर्थोरोम्बिक}\\ \text{जिप्सम}}}{CaSO_4\cdot 2H_2O}$$

38. (*c*) $$\underset{\text{जिप्सम}}{2(CaSO_4\cdot 2H_2O)} \xrightarrow[\text{निर्जलीकरण}]{120°C} \underset{\text{प्लास्टर ऑफ पेरिस}}{2CaSO_4\cdot H_2O} + 3H_2O$$

39. (*d*) जिप्सम का सूत्र $= CaSO_4\cdot 2H_2O$

प्लास्टर ऑफ पेरिस का सूत्र $= CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O$

जल अणुओं का अन्तर $= 2H_2O - \frac{1}{2}H_2O = 1\frac{1}{2}H_2O$

40. (*d*) अनार्द्र कैल्सियम क्लोराइड प्रयोगशाला में उदासीन गैसों के तीव्र शुष्कन के लिए प्रयोग किया जाता है।

41. (*b*) **जिप्सम सीमेण्ट में मिलने पर ट्राइकैल्सियम ऐलुमिनेट से संयोजन करके इसके जमने की दर को कम करता है।**

$$3CaO\cdot Al_2O_3 + 3\,CaSO_4 + 2H_2O \longrightarrow 3CaO\cdot Al_2O_3\cdot 3\,CaSO_4\cdot 2H_2O$$

अतः जमने का समय बढ़ जाता है।

42. (*c*) चूने का दूध बुझे हुए चूने का जल में निलम्बन है।

43. (*a*) $$\underset{\text{बुझा हुआ चूना}}{Ca(OH)_2} + Cl_2 \longrightarrow \underset{\text{विरंजक चूर्ण}}{CaOCl_2} + H_2O$$

$Ca(OH)_2$ **रंगहीन होता है और सीमेंट के निर्माण में प्रयोग नहीं होता। यह अपने रोगाणुनाशी प्रकृति के कारण सफेदी (पुताई) में प्रयोग होता है।**

44. (*c*) **क्योंकि** *A* **का विलयन** CO_2 **के साथ दूधियापन उत्पन्न करता है अतः यह चूने का जल अर्थात्** $Ca(OH)_2$ **का विलयन होना चाहिए।**

45. (*a*) क्षारीय धातुओं में समूह में नीचे की ओर जाने पर आयनन ऊर्जा कम होने के कारण क्रियाशीलता घटती है अतः क्षारीय धातुओं में अधिकतम आयनन ऊर्जा लीथियम की है इसलिए यह कम क्रियाशील है और जल से कम तीव्रता से क्रिया करता है।

46. (*c*) जैसे-जैसे क्षारीय धातुओं का आकार बढ़ता है वैसे ही संयोजी इलेक्ट्रॉन व केन्द्रक के बीच की दूरी बढ़ती है अर्थात् केन्द्रक संयोजी इलेक्ट्रॉनों को कम प्रबलता से बाँधता है। अत संयोजी इलेक्ट्रॉन को निकालने के लिए आवश्यक ऊर्जा (आयनन ऊर्जा) घटती हैं।

$\therefore$ IE का क्रम है $Li > Na > K > Rb$

47. (*a*) क्षार धातुओं की आयनन ऊर्जा निम्न होती है।

48. (*a*) सोडियम को द्रव अमोनिया में घोलने पर इसका रंग अमोनिकृत इलेक्ट्रॉन उत्पन्न होने के कारण गहरा नीला हो जाता है।

$$Na + (x+y)NH_3 \longrightarrow [Na(NH_3)_x]^+ + \underset{\substack{\text{विलयित या}\\ \text{अमोनिकृत इलेक्ट्रॉन}}}{e(NH_3)_y}$$

49. (*d*) $$2Na + 2H_2O \longrightarrow 2NaOH + H_2\uparrow$$
$$2NaOH + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O$$
$$Na_2CO_3 + 2HCl \longrightarrow 2NaCl + H_2O + CO_2$$
$$\underset{\text{गलित}}{NaCl} \xrightarrow{\text{विद्युत अपघटन}} Na^+ + Cl^-$$
$$Na^+ \xrightarrow{+e^-} Na \qquad Cl^- \xrightarrow{-e^-} Cl$$

50. (*a*) **Li अन्य प्रथम समूह की धातुओं से बहुत अधिक मुलायम होनी चाहिए वास्तव में Li अन्य क्षारीय धातुओं से कठोर है।**

MATHEMATICS

51. (*b*) $$\sin^{-1}\frac{4}{5} + 2\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right)$$
$$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \cot^{-1}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$$

52. (*b*) $$\cot^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) + \left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\right)}{\left(\cos\frac{1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) - \left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\right)}\right]$$
$$= \cot^{-1}\left(-\cot\frac{1}{2}x\right)$$
$$= \cot^{-1}\cot\left(\pi - \frac{1}{2}x\right) = \pi - \frac{1}{2}x$$

53. (*a*) $$\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^{-1}\left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= \cos^{-1}\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$[\because \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x]$$
$$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

54. (*b*) दिया है, $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x = \cos^{-1}0$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

उपर्युक्त समीकरण एक सर्वसमिका होगी, यदि

$$x = \frac{2}{5} \qquad \left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$$

55. (*a*) $$\sin\left[\tan^{-1}(-\sqrt{3}) + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$
$$= \sin\left[-\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \pi - \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$[\because \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x \text{ तथा } \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x]$$
$$= \sin\left[-\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

56. (*d*) $x = \tan\theta$ रखने पर,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\tan^{-1}x = 4$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}x = 8$$

$$\Rightarrow \quad x = \tan 8$$

57. (*c*) दिया है, $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow -2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1-x) \Rightarrow -2\sin^{-1}x = \cos^{-1}(1-x)$$

$$\left[\because \sin^{-1}(1-x) + \cos^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow \cos(-2\sin^{-1}x) = 1 - x$ (दोनों पक्षों की $\cos x$ से गुणा करने पर)

$\Rightarrow \cos(2\sin^{-1}x) = 1 - x$ $[\because \cos(-x) = +\cos x]$

$\Rightarrow [1 - 2\sin^2(\sin^{-1}x)] = 1 - x$ $[\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x]$

$\Rightarrow 1 - 2[\sin(\sin^{-1}x)]^2 = 1 - x$ $[\because \sin^2 x = (\sin x)^2]$

$\Rightarrow 1 - 2x^2 = 1 - x \Rightarrow 2x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$

या $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ या $\frac{1}{2}$

लेकिन $x = \frac{1}{2}$ दिए गए समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है। इसलिए $x = 0$

58. (*c*) $\tan^{-1}\left(\frac{c_1x - y}{c_1y + x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c_2 - c_1}{1 + c_2c_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c_3 - c_2}{1 + c_3c_2}\right) + \ldots + \tan^{-1}\frac{1}{c_n}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{x}{y} - \frac{1}{c_1}}{1 + \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{c_1}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}}{1 + \frac{1}{c_1c_2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}}{1 + \frac{1}{c_2c_3}}\right) + \ldots + \tan^{-1}\frac{1}{c_n}$$

$$= \tan^{-1}\frac{x}{y} - \tan^{-1}\frac{1}{c_1} + \tan^{-1}\frac{1}{c_1} - \tan^{-1}\frac{1}{c_2} + \tan^{-1}\frac{1}{c_2} - \tan^{-1}\frac{1}{c_3} + \ldots + \tan^{-1}\frac{1}{c_{n-1}} - \tan^{-1}\frac{1}{c_n} + \tan^{-1}\frac{1}{c_n}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

59. (*a*) $\sum_{m=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{2m}{m^4 + m^2 + 2}\right)$

$$= \sum_{m=1}^{n}\tan^{-1}\left[\frac{2m}{1 + (m^2+m+1)(m^2-m+1)}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\tan^{-1}\left[\frac{(m^2+m+1) - (m^2-m+1)}{1 + (m^2+m+1)(m^2-m+1)}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n}[\tan^{-1}(m^2+m+1) - \tan^{-1}(m^2-m+1)]$$

$$= (\tan^{-1}3 - \tan^{-1}1) + (\tan^{-1}7 - \tan^{-1}3) + (\tan^{-1}13 - \tan^{-1}7) + \ldots + [\tan^{-1}(n^2+n+1) - \tan^{-1}(n^2-n+1)]$$

$$= \tan^{-1}\frac{n^2+n+1-1}{1 + (n^2+n+1)\cdot 1} = \tan^{-1}\left(\frac{n^2+n}{2+n^2+n}\right)$$

60. (*a*) $\because \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+r+r^2}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{r+1-r}{1+r(r+1)}\right\}$

$$= \tan^{-1}(r+1) - \tan^{-1}(r)$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{n}[\tan^{-1}(r+1) - \tan^{-1}(r)]$$

$$= \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(0) = \tan^{-1}(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+r+r^2}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

61. (*a*) हम जानते हैं कि,

$$|\sin^{-1}x| \le \frac{\pi}{2}$$

अतः दिया गया सम्बन्ध

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \frac{3\pi}{2}$$

सम्भव होगा जब

$$\sin^{-1}x = \sin^{-1}y = \sin^{-1}z = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = y = z = 1$$

$$\therefore x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}$$

$$= 1 + 1 + 1 - \frac{9}{1+1+1}$$

$$= 3 - \frac{9}{3} = 0$$

62. (*a*) चूँकि x, y तथा z समान्तर श्रेणी में हों, तब

$$2y = x + z$$

जबकि $\tan^{-1}x$, $\tan^{-1}y$ तथा $\tan^{-1}z$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$$\therefore \quad 2\tan^{-1}y = \tan^{-1}x + \tan^{-1}z$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x+z}{1-xz}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+z}{1-y^2} = \frac{x+z}{1-xz} \Rightarrow y^2 = xz$$

$\because x, y$ तथा z समान्तर-गुणोत्तर श्रेणी में हों।

$$\therefore \quad x = y = z$$

63. (*d*) $\because \quad \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{4}\times\frac{2}{9}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

64. (*b*) हमें सिद्ध करना है कि प्रत्येक $n \in N$ के लिए,

$$P(n) = A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$$

माना $n = 1$,

$$P(1) = A^1 = \begin{bmatrix} 1+2(1) & -4(1) \\ 1 & 1-2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots(\text{i})$$

जोकि $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है अर्थात्

$$P(k) = A^k = \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \quad \ldots(ii)$$

माना $n = k + 1$,

तब $P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2k+3 & -4k+4 \\ k+1 & -2k-1 \end{bmatrix}$$

अब, $A^{k+1} = A^k A^1$

$$= \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$= \begin{bmatrix} (1+2k)\cdot 3 + (-4k)\cdot 1 & (1+2k)\cdot(-4) + (-4k)\cdot(-1) \\ k\cdot 3 + (1-2k)\cdot 1 & k\cdot(-4) + (1-2k)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2k & -4-4k \\ k+1 & -1-2k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

अतः यदि $n = k$ के लिए परिणाम सत्य हो, तो $n = k + 1$ के लिए भी परिणाम सत्य होगा।

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से, $P(n) = A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$ प्रत्येक $n \in N$ के लिए सत्य है।

65. (c) दिया है, $A^2 = I$

$\therefore$ $AA = I$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \alpha\beta \\ \alpha\gamma - \gamma\alpha & \gamma\beta + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$\alpha^2 + \beta\gamma = 1$

$\Rightarrow$ $\alpha^2 + \beta\gamma - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

66. (a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

तथा $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A\cdot(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A\cdot(\text{adj } A) = I$

परन्तु $A\cdot(\text{adj } A) = \lambda I$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$

67. (a) यहाँ, $|A| = 3$, $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $(A^{-1})^3 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

68. (d) दिया है, $AB = BA$

सिद्ध करना है $AB^n = B^n A$

$n = 1$ के लिए समी (ii) सत्य है।

माना $n = m$ के लिए समी (ii) सत्य है

अर्थात् $AB^m = B^m A$

अब, $n = m + 1$ के लिए,

(आव्यूह गुणनफल का साहचर्य नियम)

$= (B^m A)B$ [समी (iii) से]

$= B^m (AB) = B^m (BA)$ [समी (i) से]

$= (B^m B)A = B^{m+1}A$

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से समी (ii), $\forall n \in N$ के लिए सत्य है।

69. (a) दिया है, $\begin{bmatrix} x+y & 2x+z \\ x-y & 2z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $x + y = 4$ ...(i)

$x - y = 0$ ...(ii)

$2x + z = 7$ ...(iii)

तथा $2z + w = 10$ ...(iv)

इन समीकरणों को हल करने पर,

$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 3, \quad w = 4$

70. (c) $\because$ $kA = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $k\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 2k \\ 3k & -4k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $2k = 3a, \quad 3k = 2b, \quad -4k = 24$

$\Rightarrow$ $a = \frac{2k}{3}, \quad b = \frac{3k}{2}, \quad k = -6$

$\therefore$ $a = -4, \quad b = -9, \quad k = -6$

71. (a) दिया है, $A^2 = kA - 2I \Rightarrow AA = kA - 2I$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$

समान आव्यूह के संगत अवयव को बराबर करने पर, हमें प्राप्त होता है

$3k - 2 = 1 \Rightarrow k = 1$

$-2k = -2 \Rightarrow k = 1$

$4k = 4 \Rightarrow k = 1$

$-4 = -2k - 2 \Rightarrow k = 1$

अतः $k = 1$

72. (b) $\Delta_r = \begin{vmatrix} 2r-1 & {}^mC_r & 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$

$\therefore$ $\sum_{r=0}^{m} \Delta_r = \begin{vmatrix} \sum_{r=0}^{m}(2r-1) & \sum_{r=0}^{m} {}^mC_r & \sum_{r=0}^{m} 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} m^2-1 & 2^m & m+1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix} = 0$ ($\because$ दो पंक्तियाँ समान हैं)

73. (d) माना सारणिक $A = \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$A = \cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - 0)$$
$$-\cos\alpha\sin\beta(-\cos\alpha\sin\beta - 0)$$
$$-\sin\alpha(-\sin^2\beta\sin\alpha - \cos^2\beta\sin\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$= \cos^2\alpha(1) + \sin^2\alpha(1)$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

74. (c) दिया है, $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

सारणिक का प्रसार करने पर,

$$2x^2 - 40 = 18 + 14$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 40 + 32 = 72$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = 36$$
$$\therefore \quad x = \pm 6$$

75. (a) माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(1 - \log_z y \log_y z) - \log_x y(\log_y x - \log_y z \log_z x)$$
$$+ \log_x z(\log_y x \log_z y - \log_z x)$$
$$= (1 - \log_z z) - \log_x y(\log_y x - \log_y z \log_z x)$$
$$+ \log_x z(\log_y x \log_z y - \log_z x)$$
$$= (1 - 1) - (1 - \log_x y \log_y x) + (\log_x z \log_z x - 1) = 0$$
$$(\because \log_x y \log_y x = 1)$$
$$= 0 - (1 - 1) + (1 - 1) = 0$$